**Структурное разрушение графа**

Изменения, происходящие в структуре сложной системы, могут быть описаны простейшими теоретико-графовыми операциями: стягиванием ребра, удалением (добавлением) ребра, удалением (добавлением) вершины. Изменения структуры системы могут быть разовыми, а могут быть постоянными (периодическими, регулярными). Для второго случая, разумно, ввести понятие *структурной динамики* – изменение структуры системы с течением времени. Несомненно, для описания структурной динамики лучше всего подходит аппарат теории графов.

Структурные изменения в сложных системах могут иметь как позитивный характер, когда в системе появляются новые элементы, улучшающие ее функционирование, так и негативный характер, когда из строя по различным причинам выходят элементы системы, что существенно ухудшает или останавливает работу всей системы.

Существует ряд моделей и задач, для описания которых используются потоки в сетях и на графах. Потоками в сетях моделируют автотранспортное движение, перевозку товаров по железным дорогам, перекачку жидкости и газа по сети трубопроводов от источника до пункта потребления и т.д. Но все эти модели и задачи не учитывают возможность внезапного прекращения функционирования узловых элементов сетей (развязки автомобильных и железных дорог, станций высокого давления, трансформаторов и т.п.), а это часто приводит к внештатным ситуациям, неописываемым этими моделями. Нередко отказ одного узлового элемента системы приводит к череде отказов в системе (каскадному отключению), вследствие чего из строя выходит вся система.

Обозначим через – граф, соответствующий структуре исследуемой системы, – множество вершин, соответствующее элементам системы, а – множество ребер, соответствующее связям между элементами систмы. Каждой вершине припишем веса и , отражающие *текущую загрузку и предельную загрузку* элемента системы. В случае, когда текущая загрузка элемента системы достигает предельного значения , элемент систем выходит из строя. А проходящие через него потоки перераспределяются по «соседним» элементам системы. Выход из строя элемента системы в теоретико-графовой терминологии соответствует удалению из графа системы вершины с инцидентными ей ребрами. А перераспределение весов в тривиальном случае соответствует равному разделению веса удаленной вершины по вершинам, смежным с удаляемой.

При выходе из строя одного или нескольких элементов системы возможны несколько сценариев дальнейшего развития событий. Один из них возможен, если система функционирует в *предельном состоянии*, т.е. загрузка элементов близка к предельному значению. Тогда возможен “быстрый” переход системы в критическое состояние, когда система не может выполнять возложенные на нее функции.

Структурное разрушение, вообще говоря, процесс динамический. Не нарушая общности, будем считать, что – текущая загрузка вершины в момент времени . Если через , , обозначить множество вершин вышедших из строя в момент времени , т.е. те, у которых , а через – *окружение вершины*  (или множество вершин, смежных с вершиной ), , , то процесс структурного разрушения формально описывается следующим образом: в момент времени необходимо произвести проверку по всем вершинам , и сформировать множество из вершин, для которых справедливо . Во все последующие моменты времени следует воспользоваться правилом:

, , .

Если , то вершина удаляется из графа и .

Коэффициент – *параметр распределения загрузки*. Параметр распределения загрузки может зависеть от различных факторов, в простейшем случае он равномерно распределяет предельную загрузку удаляемой вершины по соседним, т.е. на для каждой вершины вычисляется как . Структурное разрушение при параметре распределения загрузки будем назвать *равномерным.*

Процесс структурного разрушения следует продолжать до тех пор, пока система не перейдет в *критическое состояние*, т.е., когда перестанет выполнять возложенные на нее функции.

Критическое состояние определяется исходя из особенностей моделируемой системы. Например, система может считаться пребывающей в критическом состоянии, если из ее структуры удален хотя бы один элемент (вершина), или система может считаться функционирующей, если ее структура после удаления элементов все еще остается связной. В настоящей работе будут рассмотрены различные *критерии отказа* системы (перехода в состояние отказа системы) или, иначе, *критерии разрушения*.

Основная задача моделирования структурного разрушения системы – выяснить, при каких условиях система может перейти в критическое состояние. (Начальные причины повреждения системы могут быт как внутренними, так и внешними.) Переход системы в критическое состояние означает, что в системе начался процесс структурного разрушения, но это не значит, что система окончательно прекратила функционировать. Систему можно считать вышедшей из строя только в том случае, когда изменения, произошедшие в структуре системы будут удовлетворять критериям отказа. Поэтому одной из основных характеристик в модели структурного разрушения будет служить *время структурного разрушения*, отражающее длительность самого процесса структурного разрушения.

Нельзя утверждать, что система, перейдя в критическое состоянии, когда из ее структуры удаляются элементы (начало процесса структурного разрушение), непременно впоследствии выйдет из строя (перейдет и в состояние отказа системы). Время структурного разрушения системы соответствует продолжительности процесса структурного разрушения от момента первого удаления (выхода из строя) элемента системы до момента остановки процесса разрушения или отказа самой системы.

Поскольку построенная модель структурного разрушения системы непосредственно связана с типом структуры самой системы, важно исследовать системы с различными типами структур, найти связь между типом структуры системы и временем структурного разрушения системы.

Нельзя подменять два представления о *сложности систем*. Сложность системы может заключаться и в сложности ее динамического поведения (самоорганизация, динамический хаос, бифуркации, случайное поведение и т.п.) и в сложности структуры, т.е. связей между элементами системы. Часто системы совмещают в себе эти оба представления о сложности, хотя не всегда исследователям удается жестко определить понятия сложности системы в поведении и в структуре. Нетривиален этот вопрос и для исследуемого в настоящей работе процесса структурного разрушения системы.

Простыми структурами в контексте настоящей работы следует считать регулярные, периодические, симметричные, автоморфные графы и деревья. Именно с исследования таких структур начнется исследование процесса структурного разрушения систем, но нельзя при этом считать, что сам процесс окажется так же “простым”.

Для исследования процесса структурного разрушения систем с “простой” структурой целесообразно использовать следующие критерии отказа:

1. *Критерий полного разрушения* . Система считается вышедшей из строя, если в системе выйдут из строя все элементы (будут удалены все вершины графа – структуры системы). Критерий полного разрушения зависит от одного параметра: – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения.

2. *Критерий связности* . Система считается вышедшей из строя, если нарушена связность ее структуры при удалении вершин. Критерий связности зависит от одного параметра: – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения.

3. *Компонентный критерий .* Система считается вышедшей из строя, если число компонент в структуре системы при ее разрушении окажется не меньше заданного числа . Компонентный критерий выхода системы из строя зависит от двух параметров: от – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения, и  – максимально допустимого числа компонент структуры при ее разрушении.

4. *Диаметральный критерий* . Система считается вышедшей из строя, если диаметр хотя бы одной из компонент структуры системы в процессе разрушения окажется меньше заданного числа . Диаметральный критерий выхода системы из строя зависит от двух параметров: от  – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения, и – минимально допустимого диаметра компонент структуры при ее разрушении.

По мере необходимости в дальнейшем будет вводиться и другие критерии отказа систем.

Множество элементов, вышедших из строя (удаленные из структуры) в момент времени будем называть *эпицентрами структурного разрушения*. В критериях *, , ,,* число  соответствует количеству эпицентров структурного разрушения системы.

Далее в настоящей главе проведено исследование структурного разрушения «простых» графов (цепей, деревьев, циклов, регулярных графов) *с разными значениями начальных загрузок и равными значениями предельных загрузок*  *для всех их вершин.*

***Условие задачи***

Имеется граф G, состоящий из 50 вершин и 70 ребер. На каждую вершину случайным образом определяется текущая загрузка от 5 до 9. Необходимо случайным образом выбрать одну точку, являющейся эпицентром структурного разрушения. Предельная загрузка вершины, после которой она разрушается – 10. Критерии, по которым будет проводиться исследование процесса структурного разрушения:

* критерий полного разрушения ()
* критерий связности ()